Concatenationの理論と本質的決定不可能性 (形式体系と計算理論)

AUTHOR(S):

堀畑, 佳宏

CITATION:

堀畑, 佳宏. Concatenationの理論と本質的決定不可能性 (形式体系と計算理論). 数理解析研究所講究録 2011, 1729: 18-35

ISSUE DATE:

2011-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/170551

数理解析研究所講究録
第 1729 巻 2011 年 18-35

Concatenation の理論と本質的決定不可能性

堀畑 佳宏*
Horihata Yoshihiro
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
Mathematical Institute, Tohoku University

2011 年 1 月 12 日

概要

本講究録では，文字列の concatenation に関する公理をもった理論とその決定不可能性，および一階算術との翻訳可能性について概説する．後半では，筆者により導入された非常に弱い concatenation の理論 WTC とその決定不可能性に関する筆者の最近の結果について紹介する．

目次

1 導入

本講究録では，concatenation の理論の先行研究と，筆者の最近の結果を概観する．まず，本節で concatenation の理論の歴史的背景をみる．2 節では，近年盛んに研究されている，

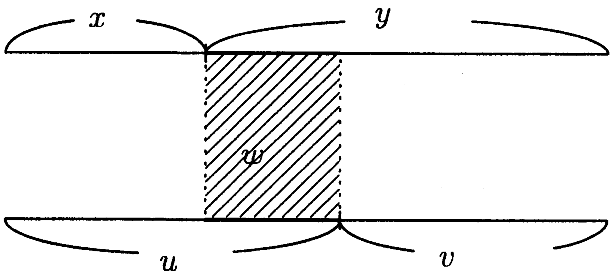
* sa6m31@math.tohoku.ac.jp

Grzegorczyk により導入された concatenation の理論 TC の定義とその本質的決定不可能性や一階算術 Q（Robinson 算術）との翻訳可能性について概観する．3 節では，筆者により導入された弱い concatenatino の理論 WTC の定義と Tarski, Mostowski, Robinson による一階算術 R との翻訳可能性についてみる．この結果の系として WTC が本質的決定不可能であることもわかる．

Concatenation の理論（theories of concatenation）とは，文字列の扱いに関する公理をもった理論で古くから研究されているが，近年，決定不可能性や，一階算術との翻訳関係の観点から興味をもたれている．この理論の研究の起源は，1935 年の Tarski の論文 [19] にみることができる．そこでは，次のような公理が導入されている（現在では "editors axiom" と呼ばれる）：

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (x^\frown y = u^\frown v \to \exists w((x^\frown w = u \wedge y = w^\frown v) \vee (x = u^\frown w \wedge w^\frown y = v))).$$

ここで記号 "⌒" は二つの文字列を連結することを表す．この公理の主張は，一つの辞書（や書籍等）に対する二人のの編集者それぞれによる編集における編集点の "補間 (interpolant)"（主張における w）の存在を保証するものである（下図を参照）．



また，1946 年の Quine の論文 [11] により concatenation の理論は意味論的に研究された．しばらくの後，2005 年に Grzegorczyk の論文 "Undecidability without Arithmetization"（[4]）により，concatenation の理論は決定不可能性との関連から改めて研究され始めた．[4] では，editors axiom と 2 つのアルファベットを持った concatenation の理論 TC（thoery of concatenation）が，算術とは異なる基礎理論として導入され（TC の定義は 2 節でみる），TC が決定不可能であることが証明された．Grzegorczyk が concatenation の理論を扱った背景には彼の哲学的動機があるが，詳しくは [4] の Introduction と 8 章を参照．ここでは，concatenation の理論 TC が，「数」ではなく「文字列」を扱う理論であるため，第一不完全性定理の証明においてコーディングする概念「有限列」や「証明（可能）」などの概念が，算術で扱うよりもダイレクトに扱えるという利点がある，ということを指摘しておく．

TC の研究は進められ，2007 年に Grzegorczyk と Zdanowski の論文 [5] により TC が本質的決定不可能であることが証明された．ここで理論 T が**本質的決定不可能である**とは，T の無矛盾な拡大が全て決定不可能であることをいう．さらに 2009 年には，Robinson 算術 Q

が TC に翻訳可能であることが，三つの方法で証明された[*1] (Švejdar[17], Ganea[3], Visser と Sterken[23, 13])．この結果は，系として TC が本質的決定不可能であることを導く．なぜなら，「翻訳関係」は「本質的決定不可能性」を保存する，すなわち T が本質的決定不可能で，T が S に翻訳可能ならば S も本質的決定不可能となるからである．

さらに，2010 年に筆者により，Q よりも（翻訳可能性の意味で）真に弱い一階算術 R に（翻訳の意味で）対応する concatenation の理論 WTC が定義され，WTC と R が互いに翻訳可能であることが示された (Horihata[7])．ここで一階算術 R は Tarski, Mostowski, Robinson[20] によって導入された非常に弱い理論であるが，本質的決定不可能であることが知られている（R 定義は 2 節でみる）．Vaught[21] では R に対するより強い結果が証明されている．また R は，不完全性定理を証明できる理論で極小なものはどのようなものか，という文脈で興味をもたれている．実際 Jones と Shepherdson による論文 [8] では，R から線形順序の公理をはずした理論 R_0 は，Σ_1 完全かつ本質的決定不可能な理論として，次の意味で極小になっている．すなわち，R_0 の公理（図式）のうち一つでもはずすと Σ_1 完全でなくなる．さらに Σ_1 完全性を求めないなら，R_0 から掛け算の公理をはずした理論 R_1 は本質的決定不可能な理論として（上と同じ意味で）極小であることも示されている ([8])．

本導入の最後に，concatenation の理論に関する歴史的疑問を記しておく[*2]．先にも引用した Tarski らによる書籍 [20] において，editors axiom による形式化とは違う方法で形式化された concatenation の理論 F が導入されている[*3]．さらにこの書籍の 87 ページで Tarski と Szmielew は，Q が F に翻訳可能なので F は本質的決定不可能である，と主張している．しかしながらこれに対する証明は記されておらず，その後もその証明は公にされていない．先の主張の証明が与えられたのは 2009 年，Ganea の論文 [3] が初めてである．Ganea による証明は，Q^- を F に翻訳することによってなされた[*4]．ここで Q^- は，Grzegorczyk による算術で，Q における演算を関数としてではなく関係としてもつ理論である．つまり，演算の全域性が保証されていない理論なので，Q よりも（理論として）真に弱い．しかしながら，Q が Q^- に翻訳可能であることが，Švejdar[15] によって証明された[*5]．さらに Ganea が，Q^- が F に翻訳可能であることを示し ([3])，翻訳関係の推移性から，Q が F に翻訳できることが示された．

ここで歴史的疑問とは以下である．[15] における Q の Q^- への翻訳可能性の証明において，Solovay による "shortening of cuts" という手法（翻訳の領域をうまく構成するための強力な手法）が本質的に用いられている．ところがこの手法は，Q^- が F に翻訳可能であると主張した Tarski らの書籍 [20] が出版された 1953 年よりだいぶ後の 1976 年に Solovay に

[*1] TC が Q に翻訳できることは知られていたので，TC と Q は互いに翻訳可能ということになる．
[*2] ここに記す疑問は，Visser, Švejdar, Ganea らによって指摘されたものである．
[*3] F の定義や性質については 2.1 を参照．
[*4] Q^- の定義は [15] やŠvejdar [16] などを参照．
[*5] Q は Q^- より（理論として）強いので，Q^- は Q に翻訳できる．よって Q と Q^- は互いに翻訳可能である．

よって開発されたものである*6．では，Tarski と Szmielew のもっていた証明はどのようなものだったのか，というのが疑問である．もし彼らが，Solovay の shortening of cuts という手法のようなものを知っていたとするなら，この手法が非常に強力であるため，より本質的にたくさんの結果を得ていたはずである．

2 TC と決定不可能性

2.1 では，Grzegorczyk[4] により導入された concatenation の理論 TC とその性質を概観する．2.2 では Tarski et al.[20] で導入された concatenation の理論 F と TC との関係をみる．

2.1 TC と Q

まず，理論どうしのある種の強さを比較する手法に用いる "翻訳" について定義する*7．

定義 2.1 (翻訳). Σ, Ξ を一階述語論理の言語とする．Σ の Ξ への **(相対的) 翻訳** ((relative) translation) $\tau : \Sigma \to \Xi$ とはペア $\langle \delta, F \rangle$ で次をみたすものとする：

- δ は 1 変数 Ξ 論理式；
- F は Σ から Ξ 論理式の集合への写像.

Σ 論理式の Ξ 論理式への翻訳は以下のように定める*8：

- Σ の n 変数関係記号 R に対し，

$$(R(x_1, \cdots, x_n))^\tau := F(R)(x_1, \cdots, x_n);$$

- $(\varphi \wedge \psi)^\tau := \varphi^\tau \wedge \psi^\tau$， 他の命題結合子に対しても同様に定める;
- $(\forall x \varphi(x))^\tau := \forall x(\delta(x) \to \varphi^\tau)$;
- $(\exists x \varphi(x))^\tau := \exists x(\delta(x) \wedge \varphi^\tau)$.

ここで $\delta(x)$ は翻訳の領域を定める*9．S, T をそれぞれ Σ 理論，Ξ 理論とする．Σ の Ξ への（相対的）翻訳 $\tau : \Sigma \to \Xi$ が存在して，S の任意の公理 φ に対しその翻訳 φ^τ が T で証明できるとき，S は T に **（相対的）翻訳可能** ((relatively) interpretable) であるといい，

---

*6 この手法は論文として出版されておらず，Hájek への手紙 ([12]) で概要を記されたものである．この手法の詳細や応用は，Hájek と Pudlák の書籍 [6] や Nelson[10] を参照．[10] ではこの手法を応用して $\mathsf{I\Delta_0}$ が Q に翻訳できることを証明している．

*7 翻訳についてのより詳細なことは Visser[22] を参照．

*8 関数記号を含む理論を翻訳する際は，よく知られる方法で関数記号を消去しておく．つまり，各関数記号に対し適宜関係記号を導入し，関係として表しておく．

*9 このことから "相対的" 翻訳と言われる．$\delta(x) \equiv x = x$ のときは単に翻訳と言う．以下では，相対的であるかないかは，決定不可能性を議論する際に本質的でないので特に区別しない．

$T \rhd S$ とかく．また，S が T に翻訳可能でかつ T が S に翻訳可能であるとき，S と T は**互いに翻訳可能**（mutually interpretable）であるという．

翻訳の大事な性質は以下である．

命題 2.2. $T \rhd S$ であるとき，以下が成り立つ：

(1) S が本質的決定不可能ならば T も本質的決定不可能である*10；
(2) T が無矛盾なら S も無矛盾である．

つまり，翻訳関係は，翻訳する側に本質的決定不可能性を，翻訳される側に無矛盾性を保存する．

次に TC の定義をみる*11．

定義 2.3. TC の言語は $(\frown, \varepsilon, \alpha, \beta)$ で，以下の公理をもつ：

TC1 $\forall x(x^\frown\varepsilon = \varepsilon^\frown x = x)$;
TC2 $\forall x\forall y\forall z(x^\frown(y^\frown z) = (x^\frown y)^\frown z)$;
TC3 $\forall x\forall y\forall u\forall v(x^\frown y = u^\frown v \rightarrow$
$\exists w((x^\frown w = u \wedge y = w^\frown v) \vee (x = u^\frown w \wedge w^\frown y = v)))$;
TC4 $\alpha \neq \varepsilon \wedge \forall x\forall y(x^\frown y = \alpha \rightarrow x = \varepsilon \vee y = \varepsilon)$;
TC5 $\beta \neq \varepsilon \wedge \forall x\forall y(x^\frown y = \beta \rightarrow x = \varepsilon \vee y = \varepsilon)$;
TC6 $\alpha \neq \beta$.

(TC3) は editors axiom とよばれる，concatenation の理論特有の公理である．ここで ε は空列を表し，$x^\frown y$ は文字列 x と文字列 y を連結（concatenate）することを表す．TC は文字列の連結に関する標準モデル $(\{a, b\}^+; \frown, \alpha, \beta, \varepsilon)$ をもつ．ただし $\{a, b\}^+$ は a, b からなる有限列全体の集合とする．TC において結合法則（TC2）が成り立つので括弧は適宜省略する．また，連結記号 $\frown$ も適宜省略する．

基本的な関係を定めておく．

定義 2.4. 関係 $\sqsubseteq, \sqsubseteq_{\mathsf{ini}}, \sqsubseteq_{\mathsf{end}}$ を次で定める：

- $x \sqsubseteq y \equiv \exists z\exists z'(zxz' = y)$;
- $x \sqsubseteq_{\mathsf{ini}} y \equiv \exists z(xz = y)$;

*10 この命題における "本質的" をはずした命題は一般に成り立たない．実際，反例として，決定不可能な群の理論が決定可能なアーベル群の理論に翻訳可能であることが知られている（Tarski et al.[20]）．

*11 Grzegorczyk のオリジナルの TC は空列 ε を含まない理論として定義されている．したがってオリジナルの公理はここでの公理とは若干違う形をしているが，ここでの公理を，空列を持たない公理へ自然と変形すればオリジナルの TC が得られる．そして，空列を含む TC と含まない TC は互いに翻訳可能であることが知られている（Visser[23]）．

- $x \sqsubseteq_{\mathsf{end}} y \equiv \exists z(zx = y)$.

TC では次のような主張が証明できる.

命題 2.5. TC で以下が証明できる：

(1) $\forall x(x\alpha \neq \varepsilon \wedge \alpha x \neq \varepsilon)$;
(2) $\forall x \forall y(xy = \varepsilon \rightarrow x = \varepsilon \wedge y = \varepsilon)$;
(3) $\forall x \forall y(x\alpha = y\alpha \vee \alpha x = \alpha y \rightarrow x = y)$;
(4) $\forall x \forall y \forall z(xy = z\alpha \rightarrow y = \varepsilon \vee \alpha \sqsubseteq_{\mathsf{end}} y)$;
(5) $\forall x \forall y(\alpha \sqsubseteq xy \rightarrow \alpha \sqsubseteq x \vee \alpha \sqsubseteq y)$.

上の (3) はアルファベット一文字に対して（したがってスタンダードな文字列に対して）は簡約化ができることを主張している．しかし，一般の項に対する簡約化はできないことが知られている.

命題 2.6. TC では以下が証明できない：

(1) $\forall x \forall y \forall z(xz = yz \rightarrow x = y)$;
(2) $\forall x \neg(\exists y(xy = x \wedge y \neq \varepsilon))$.

上の (2) は，自分自身は自分の真の部分列にはならない，ということを主張している．このような主張が証明できないのは，editors axiom で存在が保証される編集点の補間 w の "位置" が規定できないことからくる．上の命題は，TC のモデルで (1) や (2) を偽にするもを構成することによって証明される．このことの詳細は Visser[23] を参照．TC で証明できない他の命題については [23] や Čačić et al.[1] を参照.

定理 2.7 (Grzegorczyk[4]). TC は決定不可能である.

さらに，Grzegorczyk と Zdanowski の論文 [5] では，TC の Σ_1 完全性を証明し，次が示されている.

定理 2.8 (Grzegorczyk and Zdanowski[5]). TC は本質的決定不可能である.

TC は二種類のアルファベットをもつが，二種類以上のアルファベットをもつ concatenation の理論[*12]は TC に翻訳できることが，したがって二種類以上のアルファベットをもつ concatenation の理論は互いに翻訳可能であることが [5] において示されている．後の議論を見やすくするために，以降 TC は三種類のアルファベット "α, β, γ" をもつ理論とする．この理論は標準モデル $(\{a, b, c\}^+; {}^\frown, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ をもつ.

[*12] 新しいアルファベットに対する同様な公理を TC に追加あるいは変更した理論

さらに Švejdar[17], Ganea[3], Visser と Sterken[23, 13] はそれぞれ独立に次を示した.

定理 2.9. Robinson 算術 Q は TC に翻訳可能である.

この定理の逆は知られているので, これらは互いに翻訳可能となる. ここで Robinson 算術 Q は以下である.

定義 2.10. Q の言語は $(+, \cdot, 0, S)$ で, 以下の公理をもつ:

(Q1) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$;
(Q2) $\forall x (S(x) \neq 0)$;
(Q3) $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (x = S(y)))$;
(Q4) $\forall x (x + 0 = x)$;
(Q5) $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$;
(Q6) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
(Q7) $\forall x \forall y (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$.

ただし $x \leq y \equiv \exists z (x + z = y)$ とする.

Q が本質的決定不可能であることはよく知られている. また, Q は有限公理化可能であることを注意しておく.

以下, TC $\rhd$ Q を概観する. Q から TC への翻訳を作る際の難点は, 積の翻訳である.

まず, 自然数は α の列に翻訳する. ただし 0 は ε に翻訳する. 例えば,

$$2 \Rightarrow \alpha\alpha,\ 5 \Rightarrow \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$$

とする. "x が数(の翻訳結果)である" を表す論理式 $\mathrm{Num}(x)$ を次で定める:

$$\mathrm{Num}(x) \equiv \forall y \sqsubseteq_{\mathsf{ini}} x (y \neq \varepsilon \rightarrow \alpha \sqsubseteq_{\mathsf{end}} y).$$

サクセッサー S や和 $+$ は次のように翻訳すればよい:

- $S(x) \Rightarrow x^\frown \alpha$;
- $x + y \Rightarrow x^\frown y$.

積を翻訳するときの基本的なアイディアの一つは, 積の witness を用いることである. まず, 自然数の積 $m \cdot n$ の witness は数のペアの列で, $(0, 0)$ からスタートし, 次のステップでペアの右側に 1 を, 左側に m を足す. これを繰り返し, ペアの右側が n になったときにこの操作を止め, そのときの左側の数が $m \cdot n$ の結果になっている. この過程の記録が, 積 $m \cdot n$ の witness である. 例えば, $2 \cdot 3$ の witness は

$$(0, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (6, 3)$$

となる.

したがって積の翻訳は上の witness を文字列の witness に置き換えればよい. 上の例の文字列における witness は, β を括弧, γ をカンマだと考えて,

$$\beta^\frown\varepsilon\gamma\varepsilon^\frown\beta^\frown\alpha\alpha\gamma\alpha^\frown\beta^\frown\alpha\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha^\frown\beta^\frown\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\gamma\alpha\alpha\alpha^\frown\beta$$

となる. "w が x と y の積の witness (を翻訳したもの) である" という主張は TC の言語の論理式でかけるので, それを $\mathrm{PWitn}(x, y, w)$ で表すとする. しかしながら TC において, 任意の x, y の積の witness の存在を証明することができない. また仮に存在が示せたとしても, そのような witness が唯一であることが証明できない. したがって, Q の積をそのまま翻訳することはできない. しかし, Q を TC に翻訳する際, Švejdar と Ganea は, 積が必ずしも全域的でない算術 Q^- を介することにより, また Visser は Q を自然に concatenation の言語で書き換えた理論 TC_Q を介することにより, これらの困難を乗り越えた. 構図は以下である:

- $\mathsf{TC} \rhd \mathsf{Q}^-$ (Švejdar[17] と Ganea[3]), $\mathsf{Q}^- \rhd \mathsf{Q}$ (Švejdar[15]).
- $\mathsf{TC} \rhd \mathsf{TC}_\mathsf{Q}$ (Visser[23]), $\mathsf{TC}_\mathsf{Q} \rhd \mathsf{Q}$ (Sterken[13])

2.2 F と TC

ここでは F と TC が互いに翻訳可能, したがって F も本質的決定不可能であることをみる. F の本質的決定不可能性に関する歴史的疑問は「導入」で述べたので, 詳しくはそちらを参照.

まず, F についてみる.

定義 2.11 (Tarski et al.[20]). F の言語は $(^\frown, \varepsilon, \alpha, \beta)$ で, 以下の公理をもつ:

(F1) $\forall x(x^\frown\varepsilon = \varepsilon^\frown x = x)$;
(F2) $\forall x\forall y\forall z(x^\frown(y^\frown z) = (x^\frown y)^\frown z)$;
(F3) $\forall x\forall y\forall z(x^\frown z = y^\frown z \vee z^\frown x = z^\frown y \to x = y)$;
(F4) $\forall x\forall y(x^\frown\alpha \neq y^\frown\beta)$;
(F5) $\forall x(x \neq \varepsilon \to (\exists u(x = u^\frown\alpha \vee x = u^\frown\beta)))$.

まず, F と TC を論理的強さの観点でみる. (F3) は, F で成り立つが, 命題 2.6 より TC では証明できない:

- $\mathsf{F} \vdash \forall x\forall y\forall z(x^\frown z = y^\frown z \vee z^\frown x = z^\frown y \to x = y)$.
- $\mathsf{TC} \nvdash \forall x\forall y\forall z(x^\frown z = y^\frown z \vee z^\frown x = z^\frown y \to x = y)$.

一方, 命題 "$\forall x\forall y(\alpha \sqsubseteq xy \to \alpha \sqsubseteq x \vee \alpha \sqsubseteq y)$" は, 命題 2.5(5) より TC で成り立つが, F

で証明できないことがモデルを構成することによって示せる（モデルの構成法については Visser[23] を参照）：

- $\mathsf{TC} \vdash \forall x \forall y(\alpha \sqsubseteq xy \to \alpha \sqsubseteq x \vee \alpha \sqsubseteq y)$.
- $\mathsf{F} \nvdash \forall x \forall y(\alpha \sqsubseteq xy \to \alpha \sqsubseteq x \vee \alpha \sqsubseteq y)$.

よって TC と F の論理的強さは比較不可能である．

次に，F と TC の翻訳関係をみる．これに関しては，次が Ganea と Švejdar によって示された：

定理 2.12 (Ganea[3]，Švejdar[18])**.** TC と F は互いに翻訳可能である．すなわち，

- $\mathsf{TC} \rhd \mathsf{F}$，（Ganea による）
- $\mathsf{F} \rhd \mathsf{TC}$，（Švejdar による）

がなりたつ．

したがって F と TC は，論理的な強さに関しては比較不可能であるが，互いに翻訳可能な理論となっている．

Ganea は F の TC への翻訳の領域 $\delta(x)$ として

$$\mathrm{Tame}(x) \equiv \forall u \forall y(y \sqsubseteq_{\mathsf{end}} ux \to y \sqsubseteq_{\mathsf{end}} x \vee x \sqsubseteq_{\mathsf{end}} y)$$

をとり，翻訳を構成した．この証明により，Tarski et al.[20] で主張だけ述べられ，その後証明がされていなかった次の命題が証明されたことになる．

- Q は F に翻訳可能である．したがって F は本質的決定不可能である．

一方 Švejdar は TC の F への翻訳の領域として

$$\mathrm{Rad}(x) \wedge (x = \varepsilon \vee \alpha \sqsubseteq_{\mathsf{end}} x \vee \beta \sqsubseteq_{\mathsf{end}} x)$$

をとり，翻訳を構成した．ここで $\mathrm{Rad}(x)$ は

$$\mathrm{Rad}(x) \equiv \forall y \forall z(yx = zx \to y = z)$$

である．

3 WTC と決定不可能性

この節では，筆者の導入した弱い concatenation の理論 WTC を定義し，R との翻訳関係と，WTC の本質的決定不可能性をみる．本質的決定不可能性は，R が本質的決定不可能であることと，R が WTC に翻訳可能であるという結果（定理 3.15）から導かれる．

3.1 WTC とその Σ_1 完全性

まず，古くから知られる算術 R をみる．

定義 3.1 (Tarski et al.[20])**.** R の言語は $(+, \cdot, 0, S)$ で，以下の公理をもつ：各 $n, m \in \omega$ に対し，

(R1) $\bar{n} + \bar{m} = \overline{n+m}$;
(R2) $\bar{n} \cdot \bar{m} = \overline{n \cdot m}$;
(R3) $\bar{n} \neq \bar{m}$ for $n \neq m$;
(R4) $\forall x(x \leq \bar{n} \leftrightarrow x = \bar{0} \vee \cdots \vee x = \bar{n})$;
(R5) $\forall x(x \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x)$.

ただし，

$$x \leq y \equiv \exists(z + x = y),$$
$$\overline{0} := 0, \quad \overline{n+1} := S(\overline{n})$$

と定める．

Q は上の (R1) から (R5) を証明できるので，R は Q よりも論理的に弱い．さらに，命題

$$\forall y(0 + y = 0 \to y = 0)$$

は，Q で証明できるが R では証明できないので，R は Q よりも論理的に真に弱い．

また，R は Robinson 算術 Q より翻訳の意味でも真に弱い．つまり，

命題 3.2. Q は R に翻訳できない．

実際，もし Q が R に翻訳できるとすると，Q が有限公理化可能であることから，R の有限部分理論 T に翻訳可能である．一方，R が**局所的有限充足可能**[*13]であることからこの有限部分理論 T は有限モデルをもつ．このことから Q も有限モデルをもつことになるが，それは起こりえないので矛盾する．

R は本質的決定不可能であることが [20] で示されている．さらに，Jones と Shepherdson の論文 [8] では R から (R5) をはずした算術 R_0 が Σ_1 完全で本質的決定不可能である理論で極小[*14]なものであることが証明されている．さらに，R_0 から (R1) をはずした理論 R_1 は本質的決定不可能な理論で極小[*15]なものであることも示されている．これらの本質的決定不

[*13] 理論 T が局所的有限充足可能（locally finitely satisfiable）であるとは，T の任意の有限部分理論が有限モデルをもつことをいう．

[*14] R_0 から，(R1) から (R4) のどれか一つでも公理からはずすと Σ_1 完全でなくなる．

[*15] R_1 から (R2)，(R3)，(R4) のどれか一つでも公理からはずすと決定可能になる．

可能性の証明は，R, R_0, R_1 が全て互いに翻訳可能であることを証明することによってなされている．

また 2009 年には，翻訳関係の特徴づけとして次の強力な定理が Visser によって証明された．

定理 3.3 (Visser[24])**.** 理論 T が局所的有限充足可能であることと T が R に翻訳できることとは同値である．

一般に，ある理論の弱い理論への翻訳を構成することは困難である場合が多いので，この定理は非常に有益である．

このように，R は研究対象として興味深い算術理論であることがわかる．筆者はこの理論に注目し，concatenation の理論で R に対応する理論として次のような理論を考えた．ここで，スタンダードな文字列 $u \in \{a,b,c\}^+$ をかき直す規則

$$a \to \alpha, b \to \beta, c \to \gamma$$

を適用し表現しなおしたものを $\underline{u}$ とかくことにする．ただし括弧は，文字が左の文字に連結するようにつけることにする*16．例えば，$\underline{abbca} = (((\alpha\beta)\beta)\gamma)\alpha$ となる．

定義 3.4 (Horihata[7])**.** WTC の言語は $(^\frown, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma)$ で，以下の公理をもつ*17：各 $u \in \{a,b,c\}^+$ に対し，

WTC1 $\forall x \sqsubseteq \underline{u}(x^\frown\varepsilon = \varepsilon^\frown x = x)$;

WTC2 $\forall x\forall y\forall z[(x^\frown y)^\frown z \sqsubseteq \underline{u} \to x^\frown(y^\frown z) = (x^\frown y)^\frown z]$;

WTC3 $\forall x\forall y\forall s\forall t[(x^\frown y = s^\frown t \land x^\frown y \sqsubseteq \underline{u}) \to$
$\exists w((x^\frown w = s \land y = w^\frown t) \lor (x = s^\frown w \land w^\frown y = t))]$;

WTC4 $\alpha \neq \varepsilon \land \forall x\forall y(x^\frown y = \alpha \to x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$;

WTC5 $\beta \neq \varepsilon \land \forall x\forall y(x^\frown y = \beta \to x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$;

WTC6 $\gamma \neq \varepsilon \land \forall x\forall y(x^\frown y = \gamma \to x = \varepsilon \lor y = \varepsilon)$;

WTC7 $\alpha \neq \beta \land \beta \neq \gamma \land \gamma \neq \alpha$.

WTC は，スタンダードな文字列 $u \in \{a,b,c\}^+$ の部分文字列に対しては TC と同様な公理が成り立つように定められている．WTC は標準モデル $(\{a,b,c\}^+; ^\frown, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ をもつ．

WTC では結合法則が一般に成り立たないので，部分文字列などの関係は定義しなおす必要がある．

---

*16 このような括弧のつけ方は，後で見るように（例3.6），適切に定められていればどのように定めても良い．

*17 ここでは WTC を，三種類のアルファベットをもつ理論として定めたが，R を WTC で翻訳するためには二種類のアルファベットをもてば十分である．三種類のアルファベットをもたせたのは，翻訳を構成する際の議論を見やすくするためで，後で示すように（定理 3.18）二種類以上のアルファベットをもつ WTC（アルファベットの数にあわせ，公理を適宜変更，追加する）は互いに翻訳可能である．

定義 3.5. 関係 $\sqsubseteq, \sqsubseteq_{\mathsf{ini}}, \sqsubseteq_{\mathsf{end}}$ を次で定める：

- $x \sqsubseteq y \equiv x = y \vee \exists k \exists l[k^\frown x = y \vee x^\frown l = y \vee (k^\frown x)^\frown l = y \vee k^\frown(x^\frown l) = y]$,
- $x \sqsubseteq_{\mathsf{ini}} y \equiv x = y \vee \exists l(x^\frown l = y)$,
- $x \sqsubseteq_{\mathsf{end}} y \equiv x = y \vee \exists k(k^\frown x = y)$.

WTC は標準モデル $(\{a,b,c\}^+; {}^\frown, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ をもつ.

まず，スタンダードな文字列は，括弧のつけ方によらないことを次の例を通じ確認する.

例 3.6. WTC で次が証明できる：

$$((\alpha\beta)\alpha)\alpha = \alpha((\beta\alpha)\alpha) = (\alpha\beta)(\alpha\alpha).$$

実際，$u \in \{a,b,c\}^*$ を $abaa$ とすると，$\underline{u} = ((\alpha\beta)\alpha)\alpha$ となる．よって (WTC2) より，

$$\underline{u} = (\alpha\beta)(\alpha\alpha). \quad (\dagger)$$

また，$(\alpha\beta)\alpha \sqsubseteq \underline{u}$ なので，(WTC2) より，$(\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha)$ となる．したがって，$\underline{u} = (\alpha(\beta\alpha))\alpha$ となる．よって (WTC2) より，$(\alpha(\beta\alpha))\alpha = \alpha((\beta\alpha)\alpha)$ となる．したがって，

$$\underline{u} = \alpha((\beta\alpha)\alpha). \quad (\ddagger)$$

ゆえに，($\dagger$) と ($\ddagger$) より，$((\alpha\beta)\alpha)\alpha = \alpha((\beta\alpha)\alpha) = (\alpha\beta)(\alpha\alpha)$ となる.

次に，WTC の Σ_1 完全性をみる．ここで，Σ_1 論理式の定義を確認しておく．量化記号を含まない論理式，または含んでいても次のように有界な形：

$$\forall x \sqsubseteq a, \quad \exists x \sqsubseteq a$$

でしか含まない論理式を Σ_0 論理式という．ただし a は x を含まない項とする．Σ_0 論理式 φ に対し $\exists x\varphi(x)$ と表せられる論理式を Σ_1 論理式という.

次の補題は，WTC の Σ_1 完全性の証明のための重要な命題である．なお，この補題により，R の公理 (R4) が WTC に翻訳できることも分かる.

補題 3.7. 任意の $u \in \{a,b,c\}^+$ に対し，WTC で次が示せる：

$$\forall x(x \sqsubseteq \underline{u} \leftrightarrow \bigvee_{v \sqsubseteq u} x = \underline{v}).$$

このことから，体系外の帰納法により次が示せる.

定理 3.8. WTC は Σ_1 完全である．すなわち，WTC の標準モデル $\{a,b,c\}^+$ で真な Σ_1 論理式は WTC で証明可能である.

3.2 WTC と R

ここでは，WTC と R が互いに翻訳可能であることを，Horihata[7] に沿って概観する．まず，WTC が局所的有限充足可能であることが簡単に分かる．したがって定理 3.3 より次が得られる．

定理 3.9. WTC は R に翻訳可能である．

次に，R が WTC に翻訳可能であることをみる．R と R_0 は互いに翻訳可能なので，R_0 を WTC に翻訳する．Q と TC の翻訳可能性の場合と同様，積の翻訳が一番難しい．各自然数，サクセッサーや足し算の翻訳は TC $\rhd$ Q の場合と同様である．よって (R1) は翻訳できる．(R3) が翻訳できることは，(WTC7) と体系外の帰納法により簡単に分かる．また (R4) は，補題 3.7 から翻訳できることが分かる．したがって残るは積に関する公理 (R2) の翻訳のみであるので，それについて以下でみる．

R の積に関する公理は，スタンダードな自然数に対してのみ規定があるので，その部分の規定を壊さないように翻訳すればよい．そのために重要となる概念 “Good” を定義する．

定義 3.10. “x は good な文字列である” を表す論理式 $\mathrm{Good}(x)$ を次のように定める：

$$\mathrm{Good}(x) \equiv \mathrm{EL}(x) \wedge \mathrm{AS}(x) \wedge \mathrm{EA}(x).$$

ただし，

- $\mathrm{EL}(x) \equiv \forall s \sqsubseteq x(s^\frown \varepsilon = \varepsilon^\frown s = s)$;
- $\mathrm{AS}(x) \equiv \forall s_0 \forall s_1 \forall s_2[[s_0{}^\frown(s_1{}^\frown s_2) \sqsubseteq x \vee (s_0{}^\frown s_1)^\frown s_2 \sqsubseteq x]$
  $\rightarrow s_0{}^\frown(s_1{}^\frown s_2) = (s_0{}^\frown s_1)^\frown s_2]$;
- $\mathrm{EA}(x) \equiv \forall s_0 \forall s_1 \forall t_0 \forall t_1[(s_0{}^\frown s_1 = t_0{}^\frown t_1 \wedge s_0{}^\frown s_1 \sqsubseteq x) \rightarrow$
  $\exists w((s_0{}^\frown w = t_0 \wedge s_1 = w^\frown t_1) \vee (s_0 = t_0{}^\frown w \wedge w^\frown s_1 = t_1))]$

とする．

つまり，x が good であるとは，x の部分列に対しては TC の公理が成り立つときをいう．もちろん，任意のスタンダードな文字列 $u \in \{a,b,c\}^+$ に対し WTC $\vdash \mathrm{Good}(\underline{u})$ となることが示せるが，さらに次が成り立つ．

命題 3.11. WTC で以下が示せる：

(1) $\forall x(\mathrm{Good}(x) \rightarrow \mathrm{TR}_{\sqsubseteq}(x))$，ただし $\mathrm{TR}_{\sqsubseteq}(x) \equiv \forall y \forall z(y \sqsubseteq x \wedge z \sqsubseteq y \rightarrow z \sqsubseteq x)$ とする;
(2) $\forall x(\mathrm{Good}(x) \rightarrow \forall y \sqsubseteq x\, \mathrm{Good}(y))$.

ここで，TC $\rhd$ Q の証明の際に導入した $\mathrm{PWitn}(x,y,w)$ に次の条件を加え，精密化する：

(†) 積の witness は good なものである；

(‡) 任意の z に対し，witness の末以外に $\beta z\gamma y\beta$ は現れない．つまり witness w と p, z' に対し $p\beta z'\gamma y\beta = w$ ならば $\neg(\beta z\gamma y\beta \sqsubseteq p)$ となる．

これらの条件は，スタンダードな自然数どうしの積の翻訳の witness は存在すれば唯一であることが WTC で証明できるためのものである．スタンダードな自然数どうしの積の witness の存在は，体系外の帰納法により WTC で証明できる．つまり，次が成り立つ．

定理 3.12. 任意の $u, v \in \{a, b, c\}^+$ に対し $w \in \{a, b, c\}^+$ が存在して，WTC $\vdash$ PWitn$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ が成り立つ．

さらに，積の witness を詳細に分析することにより，スタンダードな自然数どうしの積に対する witness が唯一であることが示せる．

定理 3.13. 定理 3.12 における $u, v, w \in \{a, b, c\}^+$ に対し次が成り立つ：

$$\mathsf{WTC} \vdash \forall w'(\mathrm{PWitn}(\underline{u}, \underline{v}, w') \to \underline{w} = w').$$

この証明には次の補題が有効である．

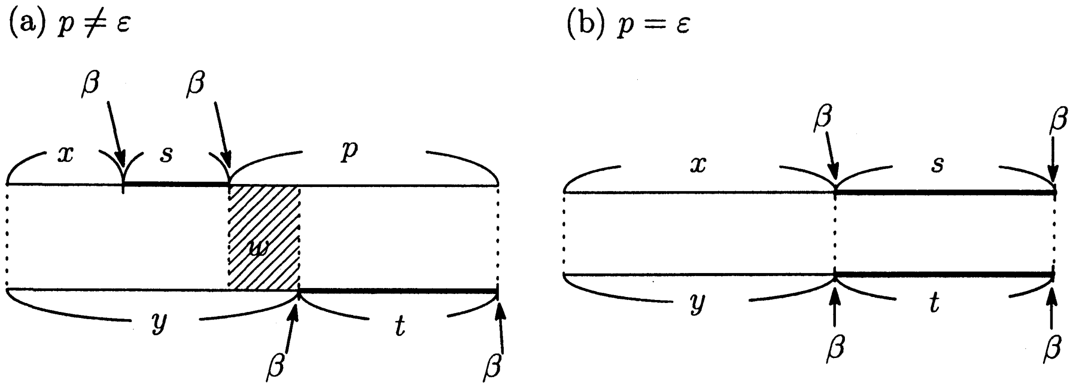
補題 3.14. WTC で以下が証明できる：

(1) 各 x, y, s, t に対し，$x\beta s$ が good で $x\beta s = y\beta t$ とする．このとき，もし s と t が β を含まないならば，$x = y$ かつ $s = t$ となる．

(2) 各 x, y, s, t, p に対し，$x\beta s\beta p$ が good で $x\beta s\beta p = y\beta t\beta$ とする．このとき，もし s と t が β を含まないならば，次のいずれかが成り立つ（下図を参照）：

(a) ある w が存在して，$x\beta s\beta w = y\beta$ かつ $wt\beta = p$；

(b) $x = y$ かつ $s = t$ かつ $p = \varepsilon$.



この補題により，witness を分析する際，$\beta * * * \gamma * * * \beta$ というブロックごとに分析することが許される．

定理 3.14 の証明は次のようになされる．まず，任意にとった witness w' がスタンダードな witness $\underline{w}$ より長くなる，つまり $\underline{w} \sqsubseteq_{\mathsf{ini}} w'$ となることが示せる．長さを比較できるのは，

PWitn に対する追加条件 (†) による．次に，背理法で，もし w' が $\underline{w}$ よりも真に長いとすると，PWitn に対する追加条件 (‡) に矛盾することが示せる．これによって定理 3.14 が示されるので，積 “$x \cdot y = z$” の翻訳 $\mathrm{M}(x, y, z)$ を次のように定めればよい．

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x,y,z) \equiv\ & \exists! w \mathrm{PWitn}(x,y,w) \land \exists w(\mathrm{PWitn}(x,y,w) \land \gamma z \beta \sqsubseteq_{\mathsf{end}} w) \\ & \lor [(\neg \exists! w \mathrm{PWitn}(x,y,w)) \land z = 0]\end{aligned}$$

すなわち，witness が唯一存在するような積に対しては適切に翻訳し，そうでないような積に対しては積の結果は 0 となるようにする．後者の場合はそもそも R_0 において積の規定が存在しないので翻訳の邪魔はしない．スタンダードな自然数どうしの積は前者の場合に含まれるので，積の公理が適切に翻訳される．したがって次が成り立つ．

定理 3.15. R は WTC に翻訳可能である．したがって，WTC と R は互いに翻訳可能である．

3.3 結論と問題

最後に，定理3.15 の系と問題を述べる．まず定理3.3 を，定理3.15 を使って言い換えられる．

系 3.16. 理論 T に対し，以下は同値である：

(1) T は局所的有限充足可能である；
(2) T は WTC に翻訳可能である．

WTC の性質について，次が示せる．

系 3.17. 以下が成り立つ：

(1) WTC は本質的決定不可能である；
(2) WTC は TC を翻訳できない；
(3) WTC で “Good は連結に関し閉じている” が証明できない．すなわち，

$$\mathsf{WTC} \nvdash \forall x \forall y(\mathrm{Good}(x) \land \mathrm{Good}(y) \to \mathrm{Good}(x^\frown y)).$$

(1) は R が本質的決定不可能であることから分かる．(2) は，もし TC が WTC に翻訳できるとすると Q が R に翻訳できることになり，命題 3.2 に矛盾する．(3) は，もし

$$\mathsf{WTC} \nvdash \forall x \forall y(\mathrm{Good}(x) \land \mathrm{Good}(y) \to \mathrm{Good}(x^\frown y))$$

とすると，Good を翻訳の領域として TC が WTC に（相対的に）翻訳できてしまうので，(2) に矛盾する．

$\mathsf{WTC_n}$ を，n（$\in \omega$）種類のアルファベットをもつ WTC とする（アルファベットの数にあわせ，公理を適宜変更，追加する）．したがってこの節の最初に導入した WTC は $\mathsf{WTC_3}$ となる．

定理 3.18. 任意の自然数 $m, n \geq 2$ に対し，$\mathsf{WTC_m}$ と $\mathsf{WTC_n}$ は互いに翻訳可能である．

実際，各 $n \geq 2$ に対し $\mathsf{WTC_3}$ と $\mathsf{WTC_n}$ が互いに翻訳可能であることを示せばよい．各 $n \geq 2$ に対し $\mathsf{WTC_n}$ は局所的有限充足可能なので，定理 3.15 より $\mathsf{WTC_3} \rhd \mathsf{WTC_n}$ となる．また，$\mathsf{WTC_n} \rhd \mathsf{WTC_2}$ は明らかなので $\mathsf{WTC_2} \rhd \mathsf{WTC_3}$ を示せばよいが．そのためには定理 3.9 より $\mathsf{WTC_2} \rhd \mathsf{R}$ を示せばよい．ところが，定理 3.15 の証明における β, γ をそれぞれ $\beta\beta, \beta$ に書き換えればそのまま $\mathsf{WTC_2} \rhd \mathsf{R}$ の証明となる．よって定理 3.18 が成り立つ．

最後に問題を述べる．

問題 1. 定理 3.18 の証明は R との翻訳関係（定理 3.9, 3.15）を経由したが，それを経由しない直接の証明はあるか．

もしこの問題が肯定的に解決されると，WTC の本質的決定不可能性に対し，系 3.17(1) の証明の方針と異なる証明を与えることができる．定理 3.18 から，WTC は（有限の範囲で）何種類ものアルファベットをもっているとできる．このことを利用して，チューリングマシーンを文字列として WTC の上でコーディングし，よく知られている本質的決定不可能性の証明がそのまま適用できる*18．

翻訳の次数*19（degree of interpretability）に関連して，次の問題が考えられる．

問題 2. “自然な” 理論 T で

- $\mathsf{TC} \rhd T \rhd \mathsf{WTC}$,
- $\mathsf{WTC} \not\rhd T$ かつ $T \not\rhd \mathsf{TC}$

となるものは存在するか．

一方，次のような事実は簡単に確認できる．

事実 3.19. “自然な” 理論 T で

- $\mathsf{TC} \rhd T$ かつ $T \not\rhd \mathsf{TC}$,
- T と WTC は（翻訳可能性の意味で）比較不可能

---

*18 チューリングマシーンの TC におけるコーディングについては Zdanowski[25] の Appendix を参照．それを利用した TC の本質的決定不可能性の証明は Grzegorczyk, Zdanowski[5] を参照．これらの議論は本質的に変更することなく，WTC の上で展開できる．

*19 この一般論は Švejdar[14] や Lindström[9] の 7 章，Friedman の講義ノート [2] などを参照．

となるものが存在する．

例えば上のような T として1つのサクセッサーのみを持つ理論（S とする）がとれる．実際，S は明らかに Q に翻訳可能なので，S は TC に翻訳可能ある．一方，S は決定可能であることが知られているので，TC は S に翻訳可能でない．よって，

$$\mathsf{TC} \rhd S \text{ かつ } S \not\rhd \mathsf{TC}.$$

また，S は決定可能なので，WTC は S に翻訳可能でない．一方，S は明らかに局所的有限充足可能でないので，S は WTC に翻訳可能でない．よって，

$$S \not\rhd \mathsf{WTC} \text{ かつ } \mathsf{WTC} \not\rhd S.$$

このほかにも上のような理論 T として，プレスバーガー算術がとれる．

参考文献

[1] V. Čačić, P. Pudlák, G. Restall, A. Urquhart, and A. Visser. Decorated linear order types and the theory of concatenation. In P. Maddy F. Delon, U. Kohlenbach and F. Stephan, editors, *Logic colloquium 2007*, pages 1–13. ASL and CUP New York, 2010.

[2] H. Friedman. Interpretation, according to Tarski. Lecture note of *Nineteenth Annual Tarski Lectures* at the University of California at Berkeley, http://www.math.ohio-state.edu/ friedman/pdf/Tarski1,052407.pdf.

[3] M. Ganea. Arithmetic on semigroups. *The Journal of Symbolic Logic*, 74(1):265–278, 2009.

[4] A. Grzegorczyk. Undecidability without arithmetization. *Studia Logica*, 79(1):163–230, 2005.

[5] A. Grzegorczyk and K. Zdanowski. Undecidability and concatenation. In V. W. Marek A. Ehrenfeucht and M. Srebrny, editors, *Andrzej Mostowski and Foundational Studies*, pages 72–91. IOS Press, 2008.

[6] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic.* Springer, Berlin, 1993.

[7] Y. Horihata. Weak theories of concatenation and arithmetic. preprint.

[8] J. P. Jones and J. C. Shepherdson. Variants of Robinson's essentially undecidable theory R. *Archive for Mathematical Logic*, 23:61–64, 1983.

[9] P. Lindström. *Aspects of Incompleteness.* Springer-Verlag, 1997.

[10] E. Nelson. *Predicative arithmetic.* Princeton university press, 1986.

[11] W. V. Quine. Concatenation as a basis for arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 11:105–114, 1946.

[12] R. M. Solovay. Interpretability in set theories. August 1976. unpublished letter to P. Hájek, http://www.cs.cas.cz/hajek/RSolovayZFGB.pdf.

[13] R. Sterken. *Concatenation as a basis for* Q *and the intuitionistic variant of Nelson's classic result.* Master's thesis, Universiteit van Amsterdam, October 2008.

[14] V. Švejdar. Degree of interpretability. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 19:789–813, 1978.

[15] V. Švejdar. An interpretation of Robinson arithmetic in its Grzegorczyk's weaker variant. *Fundamenta Informaticae*, 81:347–354, 2007.

[16] V. Švejdar. Weak theories and essential incompleteness. In *The Logica Yearbook 2007: Proceedings of the Logica 08 International Conference*, Philosophia Praha, 2008.

[17] V. Švejdar. On interpretability in the theory of concatenation. *Nortre Dame Journal of Formal Logic*, 50(1):87–95, 2009.

[18] V. Švejdar. Relatives of Robinson arithmetic. In *The Logica Yearbook 2008: Proceedings of the Logica 08 International Conference*, pages 253–263. 2009.

[19] A. Tarski. Der wahrheitsbegriff in den formalisierten sprachen. *Studia Philosophica*, 1:261–405, 1935.

[20] A. Tarski, A. Mostowski, and R. M. Robinson. *Undecidable theories.* North-Holland, 1953.

[21] R. L. Vaught. On a theorem of Cobham concerning undecidable theories. In E. Nagel, P. Suppes, and A. Tarski, editors, *Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, pages 14–25. Stanford University Press, 1962.

[22] A. Visser. An overview of interpretability logic. In M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, and M. Zakharyaschev, editors, *Advanced in Modal Logic I(AiML'96, Berlin)*, volume 87 of CSLI Lecture Notes, pages 307–359. CSLI Publications, 1998.

[23] A. Visser. Growing commas – a study of sequentiality and concatenation. *Nortre Dame Journal of Formal Logic*, 50(1):61–85, 2009.

[24] A. Visser. Why the theory R is special. Logic Group Preprint Series 267, Department of Philosophy, Utrecht University, 2009.

[25] K. Zdanowski. *Arithmetic in finite but potentially infinite werlds.* PhD thesis, Warsaw University, 2005.